

Модификация на формулите на Ойлер при решение и проверка на задачи от сферично движение

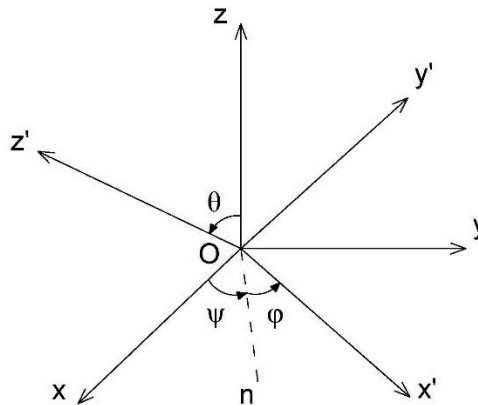
Теодор Тодоров, e-mail: todorov.fhe@gmail.com

Резюме:

На базата на формулите на Ойлер при сферично движение на тяло се извеждат тъждества за кинематичните характеристики на точка от тялото, инвариантни по отношение на координатната система (неподвижна или подвижна), в която се разглежда точката. Приложен е пример.

Въведение:

Сферично движение на тяло е такова движение, при което една точка от тялото остава неподвижна [1]. Това е движение с три ротационни степени на свобода, които се описват посредством Ойлеровите ъгли: ъгъл на прецесия $\psi = \psi(t)$, ъгъл на нутация $\theta = \theta(t)$, ъгъл на собственото въртене $\varphi = \varphi(t)$. Пресечницата на равнините (xOy) и $(x'Oy')$ се нарича „линия на възлите“. Бележи се традиционно с n . Координатната система $Oxyz$ е неподвижна, а координатната система $Ox'y'z'$, неподвижно свързана с тялото, мени своето положение около неподвижната точка O (виж фиг.1).

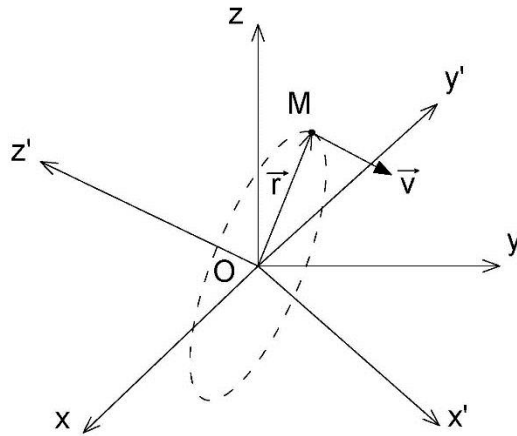


Фиг. 1. Класическа постановка

Извод на тъждествата

От предпоставката за абсолютно твърдо тяло, с която работи теоретичната механика [2], [3] следва, че разстоянието между кои да е две точки от тялото остава постоянно при неговото (на тялото) движение. При сферично движение на тяло с неподвижна точка O и произволно избрана точка M от тялото, разстоянието OM остава постоянно, а векторът $\overrightarrow{OM}$ мени своето направление. От казаното следва, че т. M се движи по сферична повърхнина с център т. O и радиус $|\vec{r}|$.

Тук $\vec{r} = \vec{r}(t)$ е радиус-векторът на т. M . [2]



Фиг. 2. Траектория на точка

Следователно, точка M винаги може да се разглежда като точка от голяма окръжност на сфера с радиус r . В даден момент от времето скоростта на т. M е $\vec{v}$. Скоростта $\vec{v}$ е по тангентата към траекторията на движение, която във всеки момент от времето е дъга от окръжност. От геометрията знаем, че допирателната към точка от окръжност е винаги перпендикулярна на радиуса на окръжността в съответната точка [4]. От тук следва: $\angle(\vec{r}; \vec{v}) = 90^\circ$. Ако се изрази скаларното произведение на векторите $\vec{r} = (x; y; z)$ и $\vec{v} = (\dot{x}; \dot{y}; \dot{z})$ чрез техните координати [5], то се достига до:

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0 \quad (1)$$

Ако уравнение (1) се диференцира спрямо времето, то:

$$\frac{d(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})}{dt} = \dot{x}\dot{x} + x\ddot{x} + \dot{y}\dot{y} + y\ddot{y} + \dot{z}\dot{z} + z\ddot{z} = x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} + v^2 \quad (2)$$

, като се отчете, че $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2$. Когато дясната част на равенство (2) се приравни на нула се стига до:

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = -v^2 \quad (3)$$

Нека сега разгледаме зависимостите на Ойлер [2]:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y \\ v_y &= \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z \\ v_z &= \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \end{aligned} \quad (4)$$

За ускорения:

$$\begin{aligned} a_x &= z\varepsilon_y - y\varepsilon_z + \omega_x(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 x \\ a_y &= x\varepsilon_z - z\varepsilon_x + \omega_y(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 y \\ a_z &= y\varepsilon_x - x\varepsilon_y + \omega_z(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 z \end{aligned} \quad (5)$$

Следва да се отбележи, че тези формули разглеждат съответните кинематични характеристики на точката в неподвижни координати. В подвижни координати зависимостите са напълно аналогични, с тази разлика, че навсякъде в (4 и 5) се добавя знак прим [2]. Доказателство на:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \vec{r}^2 (\vec{\omega}\vec{\varepsilon}) - (\vec{r}\vec{\omega})(\vec{r}\vec{\varepsilon}) \quad (6)$$

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \varepsilon_y (z\dot{x} - x\dot{z}) + \varepsilon_x (y\dot{z} - z\dot{y}) + \varepsilon_z (x\dot{y} - y\dot{x}) \quad (7)$$

Като се приложат непосредствено формулите на Ойлер:

$$\begin{aligned} v_x a_x &= (\omega_y z - \omega_z y) \left[z\varepsilon_y - y\varepsilon_z + \omega_x (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 x \right] = \\ &= \omega_y z z \varepsilon_y - \omega_y z y \varepsilon_z + \omega_x \omega_y z (\vec{r}\vec{\omega}) - \omega_y z \omega^2 x - \omega_z y z \varepsilon_y + \omega_z y y \varepsilon_z - \\ &\quad - \omega_z y \omega_x (\vec{r}\vec{\omega}) + \omega_z y \omega^2 x \\ v_y a_y &= (\omega_z x - \omega_x z) \left[x\varepsilon_z - z\varepsilon_x + \omega_y (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 y \right] = \\ &= \omega_z x x \varepsilon_z - \omega_z x z \varepsilon_x + \omega_z \omega_y x (\vec{r}\vec{\omega}) - \omega_z x \omega^2 y - \omega_x z x \varepsilon_z + \omega_x z z \varepsilon_x - \\ &\quad - \omega_x z \omega_y (\vec{r}\vec{\omega}) + \omega_x z \omega^2 y \\ v_z a_z &= (\omega_x y - \omega_y x) \left[y\varepsilon_x - x\varepsilon_y + \omega_z (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 z \right] = \\ &= \omega_x y y \varepsilon_x - \omega_x y x \varepsilon_y + \omega_x \omega_z y (\vec{r}\vec{\omega}) - \omega_x y \omega^2 z - \omega_y x y \varepsilon_x + \omega_y x x \varepsilon_y - \\ &\quad - \omega_y x \omega_z (\vec{r}\vec{\omega}) + \omega_y x \omega^2 z \end{aligned} \quad (8)$$

,където се използва дефиницията за скалярно произведение на вектори:

$$x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z = \vec{r}\vec{\omega} \quad (9)$$

Образува се сумата от лявата страна на (6) и след извършване на съкращения и подходящо групиране се достига до:

$$\begin{aligned} v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z &= \varepsilon_y \omega_y (x^2 + z^2) + \omega_z \varepsilon_z (x^2 + y^2) + \omega_x \varepsilon_x (z^2 + y^2) - \\ &\quad - y\varepsilon_y (z\omega_z + x\omega_x) - z\varepsilon_z (y\omega_y + x\omega_x) - x\varepsilon_x (z\omega_z + y\omega_y) \end{aligned} \quad (10)$$

Отчита се, че:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z &= \varepsilon_y \omega_y (r^2 - y^2) + \omega_z \varepsilon_z (r^2 - z^2) + \omega_x \varepsilon_x (r^2 - x^2) - \\ &\quad - y\varepsilon_y (z\omega_z + x\omega_x) - z\varepsilon_z (y\omega_y + x\omega_x) - x\varepsilon_x (z\omega_z + y\omega_y) = r^2 (\vec{\omega}\vec{\varepsilon}) - \\ &\quad - \varepsilon_y \omega_y y^2 - \varepsilon_z \omega_z z^2 - \omega_x \varepsilon_x x^2 - y\varepsilon_y (z\omega_z + x\omega_x) - z\varepsilon_z (y\omega_y + x\omega_x) - \\ &\quad - x\varepsilon_x (z\omega_z + y\omega_y) = r^2 (\vec{\omega}\vec{\varepsilon}) - \varepsilon_y y (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \\ &\quad - \varepsilon_z z (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \varepsilon_x x (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) = \\ &= r^2 (\vec{\omega}\vec{\varepsilon}) - (\vec{r}\vec{\omega})(x\varepsilon_x + y\varepsilon_y + z\varepsilon_z) \end{aligned} \quad (12)$$

Окончателно се получава точно изразът (6). С аналогични разсъждения при промяна на групирането може да се получи и изразът (7). С това са доказани изразите (1,3,6,7). За тях следва да се отбележи, че те са инвариантни по отношение на

координатната система. Т.е. без значение дали се разглежда движението на точка от сферично движещо се тяло в подвижната или неподвижната координатна система, те са винаги изпълнени. Доказателството на това твърдение е аналогично на вече изложеното, като единствената разлика ще е в означението на величините [2].

Приложение на изрази (1,3,6,7)

В класическите задачи от сферично движение (т.е. задачите, разглеждани преди частните случаи на постоянна регулярна прецесия), обикновено се търсят кинематични характеристики на точка от сферично движещо се тяло в даден момент от времето при зададени закони за изменение на Ойлеровите ъгли. При този тип задачи от решаващия се очаква да приложи непосредствено формулите на Ойлер и да изведе последователно числени стойности за проекциите на векторите ъглова скорост и ъглово ускорение на тялото, както и за векторите скорост и ускорение на точката [6]. Чрез решаването на такъв тип задачи се усвояват по-лесно основните зависимости на сферичното движение и се полага основата за разбиране и вникване в поведението на системи, важни в практическо отношение (например: жирографи, конусни предавки). Решаването на такъв тип задачи не е лишено от смисъл и по чисто педагогически съображения. То обаче е съпроводено с голям обем изчислителна работа и често пъти - с грешки. Уравнения (1,3,6) дават възможност за проверка на резултатите от тези изчисления и могат да се използват при подвижна и неподвижна координатна система. Това се илюстрира най-добре с пример [7].

Пример:

Дадени за законите за изменение на Ойлеровите ъгли на тяло, което извършва сферично движение: $\psi = -4t$; $\theta = \frac{\pi}{4} \cos(3t)$; $\varphi = 15t$. Да се намерят големините на скоростта и ускорението на точка М от тялото, която в момент $t = t_1 = 1s$ има координати спрямо подвижната координатна система $\xi = 4cm$; $\eta = -3cm$; $\zeta = 5cm$. Забележка: за да се спази традицията на съветския сборник, тук са употребени ξ, η, ζ вместо x', y', z' за означение на подвижната координатна система.

Решение:

Чрез непосредствено приложение на формулите на Ойлер се достига до:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\xi} &= 2,06s^{-1} \\ \omega_{\eta} &= -1,93s^{-1} \\ \omega_{\zeta} &= 12,149s^{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega = 12,46s^{-1}; \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon_{\xi} &= -33,71s^{-2} \\ \varepsilon_{\eta} &= 18,17s^{-2} \\ \varepsilon_{\zeta} &= -0,92s^{-2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varepsilon = 38,3s^{-2}$$

$$\left. \begin{aligned} v_{\xi} &= 26,77cm/s \\ v_{\eta} &= 38,26cm/s \\ v_{\zeta} &= 1,54cm/s \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = 46,72cm/s \quad \left. \begin{aligned} a_{\xi} &= -376,07cm/s^2 \\ a_{\eta} &= 486,4cm/s^2 \\ a_{\zeta} &= 159,41cm/s^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 635,16cm/s^2 \quad (13)$$

С това класическото решение на задачата приключва. Възможно е също така да се определят и посочните косинуси за всеки вектор [5]. Обръща се внимание, че тук голяма част от тривиалните изчисления е пропусната. Ако те се включат, обемът на

пълното решение на тази основна задача нараства в пъти. Зависимости (1,3,6) могат да се приложат за проверка:

$$\begin{aligned}x'\dot{x}' + y'\dot{y}' + z'\dot{z}' &= 0 \Rightarrow 26,77 \cdot 4 + 38,26 \cdot (-3) + 1,54 \cdot 5 = 107,08 - 114,78 + 7,7 = 0 \\x'\ddot{x}' + y'\ddot{y}' + z'\ddot{z}' &= -v^2 \Rightarrow 4(-376,07) + (-3)(486,4) + 5(159,41) = -2166,43 \approx \\&\approx -v^2 = -(46,72)^2 = -2182,76 \text{ cm}^2 / \text{s}^2\end{aligned}\quad (14)$$

Грешката в резултатите ($\Delta \approx 0,75\%$) се дължи на закръглянето. Равенства (1) и (3) са особено удобни за бърза проверка на проекциите на скоростта и ускорението, които са резултат на заместване в сравнително дълги формули [2], [6], [7], при което вероятността за допускане на грешка е голяма. За проверка на третото равенство (6) е удобно да се изчислят предварително някои величини:

$$\begin{aligned}\dot{x}'\ddot{x}' + \dot{y}'\ddot{y}' + \dot{z}'\ddot{z}' &= \vec{r}^2 (\vec{\omega}\vec{\varepsilon}) - (\vec{r}\vec{\omega})(\vec{r}\vec{\varepsilon}) \\ \vec{r}^2 &= 4^2 + (-3)^2 + 5^2 = 50 \text{ cm}^2\end{aligned}\quad (15)$$

$$\begin{aligned}\vec{\omega}\vec{\varepsilon} &= 2,06(-33,71) + (-1,93)18,17 + 12,14(-0,92) = -115,69 \text{ s}^{-3} \\ \vec{r}\vec{\omega} &= 4,2,06 + (-3)(-1,93) + 5(12,149) = 74,775 \text{ cm} / \text{s} \\ \vec{r}\vec{\varepsilon} &= 4(-33,71) + (-3)(18,17) + 5(-0,92) = -193,95 \text{ cm} / \text{s}^2 \\ \vec{v}\vec{a} &= -376,07 \cdot 26,77 + 486,4 \cdot 38,26 + 159,41 \cdot 1,54 = 8787,76 \text{ cm}^2 / \text{s}^3\end{aligned}\quad (16)$$

Тогава:

$$8787,76 \approx 50(-115,69) - (74,775)(-193,95) = 8718,11 \text{ cm}^2 / \text{s}^3 \quad (17)$$

Грешката ($\Delta \approx 0,8\%$) се дължи на закръглянето. По този начин се проверяват векторите ъглова скорост $\vec{\omega}$ и ъглово ускорение $\vec{\varepsilon}$. Ще се даде и проверка на (7).

$$\begin{aligned}18,17(5,26,72 - 4,1,54) + (-33,71)(-3,1,54 - 5,38,26) + \\ + (-0,92)(4,38,26 - (-3)26,77) &= 18,17(133,85 - 6,16) - \\ -33,71(-4,62 - 191,3) - 0,92(153,04 + 80,31) &= 2320,13 + \\ + 6604,46 - 214,68 &= 8709,91 \approx 8787,76 \text{ cm}^3 / \text{s}^2\end{aligned}\quad (18)$$

Грешка ($\Delta \approx 0,89\%$) се натрупва от закръглянето.

Заклучение

При решаването на задачи от сферично движение на тяло чрез директно прилагане на зависимостите на Ойлер вероятността за допускане на грешка е голяма. Уравнения (1,3,6,7) дават възможност за бърза проверка на получените резултати. Тези уравнения са инвариантни по отношение на координатната система, в която се разглежда даден вектор. Приведеният по-горе пример демонстрира това.

Използвана литература:

- [1] Ц. Савов и Д. Патъов, Теоретична механика част II кинематика и динамика (глави 1-11), София: Изд. ВНВТУ "Т.Каблешков", 1988, р. 196.
- [2] А. Писарев, Ц. Парасков и С. Бъчваров, Курс по теоретична механика I част Статика и кенематика, 2-ро ред., София: Държавно издателство „Техника“, 1986.
- [3] П. Павлов, К. Младенов, С. Лилкова-Маркова, А. Дойчева, Д. Лолов, Б. Наков и А. Младенски, Теоретична механика - част 1 (Кинематика и статика) Учебник и методично ръководство, София: АВС Техника, 2013.
- [4] К. Банков и Т. Витанов, Геометрия, София: Анубис, 2003.
- [5] Т. Гичев, Математика Линейна алгебра, Аналитична геометрия, Тензорно смятане, София: Изд. УАСГ, 2008.
- [6] С. Бъчваров, А. Джонджоров, Б. Чешанков и Н. Малинов, Ръководство за упражнения и решаване на задачи по теоретична механика, София: Държавно издателство „Техника“, 1973.
- [7] А. Яблонский, С. Норейко, С. Вольфсон, Н. Карпова, Б. Квасников, Ю. Минкин, Н. Никитина, В. Павлов и Ю. Тепанков, Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике, Москва: Высшая школа, 1978.