

ОБОБЩЕН ДИНАМИЧЕН И МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ НА МАЛКИТЕ ТРЕПТЕНИЯ НА СФЕРИЧНО ДВИЖЕЩО СЕ ТЯЛО

Теодор ТОДОРОВ

tstodorov_fhe@uacg.bg

катедра „Техническа механика“, ХТФ при УАСГ-София, 1164, България

Разгледано е сферичното движение на тяло при предпоставката за малки ъгли. За да се подчертае пространствената същност на задачата се работи с прътови елементи по три взаимно перпендикулярни направления. Има възможност за окачане на концентрирани маси по направление на прътите. Тялото има една неподвижна точка. Равновесното му положение се осигурява от линейни пружини. Същите поддържат трептенията на тялото при различни отклонения от равновесното му положение. За изучаване на затихващите трептения се предвижда разполагането на демпферни устройства. Принудените трептения се предизвикват от напречни хармонични сили (модел на ветрови въздействия), кинематични смущения, моделиращи сеизмични въздействия (преместване на основата) и инерционни смущения, които се моделират чрез въртене на неуравновесени маси. Математическият модел се описва с диференциалните уравнения на Лагранж от II-ри род.

Ключови думи: динамичен модел, математически модел, малки ъгли

1. Увод

Трептенията на множество конструкции могат да се моделират с помощта на сферичното движение. Това е движение на тяло с една неподвижна точка [Яблонский и др. 1962 а]. Като примери могат да се посочат различни кули, мачти, антени или съоръжения на електропреносната мрежа. За да се изучи сферичното движение се предвижда създаването на модел, който да обхване основните видови трептения – свободни затихващи, свободни незатихващи, принудени затихващи и принудени незатихващи трептения [Писарев 1985].

Следва да се отбележи, че една строителна конструкция в общия случай има множество степени на свобода (СС) и се описва с много на брой обобщени координати. Това води до същия голям брой диференциални уравнения в математическия модел. Преминването към предпоставката за сферично движещо се тяло позволява значително да се улесни постановката на задачата, като същевременно се запази основната идея – пространствени трептения при малки ъгли.

2. Уравнения на Лагранж от II-ри род

Счита се, че уравненията на Лагранж от II-ри род са универсален метод на решение на задачи от Динамиката [Яблонский и др. 1962 б]. Това е избраният математически модел при изследване на сферично движещото се тяло. Общият Вид на уравненията е:

$$(1) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = Q_j$$

, където E_k е кинетичната енергия на системата, E_p е потенциалната енергия на системата, Φ е функцията на затихванията (функция на Рейли) и Q_j са обобщените сили, приложени върху системата. q_i са обобщените координати. Уравненията на Лагранж в случая са три, тъй като толкова са степените на свобода на тялото, извършващо сферично движение. За обобщени координати се избират завъртанията около оси x , y и z на Декартова координатна система, свързана с тялото. В процеса на решението на (1) се стига до класическото представяне на уравненията на движението, което в матричен вид (по-удобен за обработка в програмна среда) е:

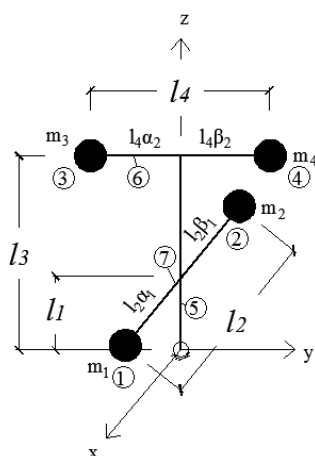
$$(2) [a]\{\ddot{q}\} + [b]\{\dot{q}\} + [c]\{q\} = \{Q\}$$

В (2) с [a], [b] и [c] са означени матрицата на инерционните характеристики, дисипативната матрица и матрицата на еластичните характеристики. С q отново са означени обобщените координати, докато {Q} е векторът на обобщените сили.

За определянето на матриците [a], [b] и [c] е необходимо да се изразят кинетичната енергия, потенциалната енергия и да се опише функцията на Рейли.

3. Геометрия на модела и матрица на инерционните характеристики

Необходимо е да се подчертае, че задачата за сферично движещото се тяло е пространствена. Схема на модела е показана на фиг. 1. Неподвижната точка е приета в началото на Декартовата координатна система.



Фиг. 1 – Принципна схема на геометрията, използвана за изчисление на инерционната матрица

Като се ползват известните от курсовете по Динамика формули [Бъчваров и др. 1973] се определят масовите инерционни моменти по оси x, y и z, а така също и центробежните масови инерционни моменти, които се ползват при определянето на матрицата на инерционните характеристики. При симетрична постановка на задачата (материална симетрия спрямо равнини xOz, yOz) матрицата на инерционните характеристики се получава директно диагонална.

$$(3) [a] = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

За по-прегледно и по-лесно определяне на матрицата на инерционните характеристики

се използва програмата MATLAB [Moore 2013]. На фиг. 2 е показан кодът в MATLAB (със зададени конкретни числа), който изчислява масовите инерционни моменти и представя матрицата на инерционните характеристики.

```
clear, clc
```

```
l1=50;l2=50;l3=120;l4=60;% Дължини в см !
```

```
R5=3;r5=2.9;R6=3;r6=2.9;R7=3;r7=2.9; %Диаметри в см !
```

```
alpha1=0.5;alpha2=0.5;beta1=0.5;beta2=0.5;
m1=1;m2=1;m3=1;m4=1;m5=5;m6=2;m7=1;
dx1=l2*alpha1;dy1=0;dx2=-
```

```
l2*beta1;dy2=0;dx3=0;dy3=-l4*alpha2;
```

```
dx4=0;dy4=l4*beta2;dx5=0;dy5=0;dx6=0;dy6=0;dx7=0;
dy7=0;
```

```
dz1=l1;dz2=l1;dz3=l3;dz4=l3;dz5=l3/2;dz6=l3;dz7=l1;
```

```
Ixy=0;
```

```
Iyz=(m3*dy3*dz3)+(m4*dy4*dz4);
```

```
Ixz=(m1*dx1*dz1)+(m2*dx2*dz2);
```

```
Ix7=(m7/2)*(R7^2+r7^2);Ix5=(m5/12)*(3*R5^2+3*r5^2+
l3^2);
```

```
Ix6=(m6/12)*(3*R6^2+3*r6^2+l4^2);
```

```
Ix=Ix7+Ix6+Ix5+m1*(dz1^2+dy1^2)+m2*(dz2^2+dy2^2)
+m3*(dz3^2+dy3^2)+m4*(dz4^2+dy4^2)+m5*(dz5^2+
dy5^2)+m6*(dz6^2+dy6^2)+m7*(dz7^2+dy7^2);
```

```
Iy6=(m6/2)*(R6^2+r6^2);Iy5=(m5/12)*(3*R5^2+3*r5^2+
l3^2);
```

```
Iy7=(m7/12)*(3*R7^2+3*r7^2+l2^2);
```

```
Iy=Iy5+Iy6+Iy7+m1*(dz1^2+dx1^2)+m2*(dz2^2+dx2^2)
+m3*(dz3^2+dx3^2)+m4*(dz4^2+dx4^2)+m5*(dz5^2+
dx5^2)+m6*(dz6^2+dx6^2)+m7*(dz7^2+dx7^2);
```

```
Iz5=(m5/2)*(R5^2+r5^2);Iz6=(m6/12)*(3*R6^2+3*r6^2+
l4^2);
```

```
Iz7=(m7/12)*(3*R7^2+3*r7^2+l2^2);
```

```
Iz=Iz5+Iz6+Iz7+m1*(dx1^2+dy1^2)+m2*(dx2^2+dy2^2)
+m3*(dx3^2+dy3^2)+m4*(dx4^2+dy4^2)+m5*(dx5^2+
dy5^2)+m6*(dx6^2+dy6^2)+m7*(dx7^2+dy7^2);
```

```
A=[Ix -Ixy -Ixz; -Ixy Iy -Iyz; -Ixz -Iyz Iz];
```

```
B=A*(1/10000)%3a размерност kgm^2
```

```
[ei,li]=eig(B)% За определяне на гл.ин.моменти и оси
```

Фиг. 2 – Код в MATLAB за определяне на матрицата на инерционните характеристики при зададена геометрия.

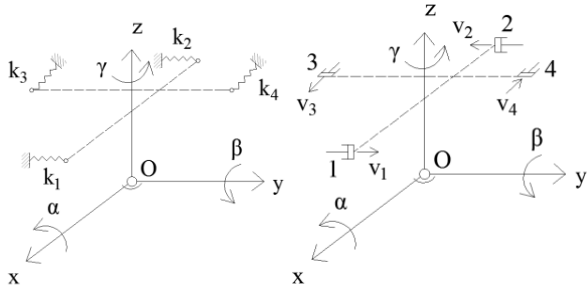
В програмният код от фиг. 2 са заложили формулите за инерционни моменти на тръби. Разбира се, за да се получи функцията за кинетичната енергия на сферично движещо се тяло може да се ползва и известната формула [Кисъв 1979] за главни инерционни моменти:

$$(4) E_k = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 - 2I_{zy} \omega_z \omega_y - 2I_{zx} \omega_z \omega_x - 2I_{xy} \omega_x \omega_y)$$

Ако се изчислят производните на (4) спрямо обобщените координати, то ще се стигне отново до матрицата на инерционните характеристики, определена чрез кода на фиг. 2.

4. Определяне на еластичната и дисипативната матрици

За да се определят дисипативната и еластичната матрици се ползват схемите, показани на фиг. 3.



Фиг. 3 – Схеми за определяне на матриците [b] и [c].

Известно е, че функцията на Рейли се задава чрез:

$$(5) \Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i v_i^2$$

, където b е коефициент на линейно съпротивление [Ns/m] и v е скоростта на съответната частица. Известно е също [Писарев и др. 1986], че скоростта на всяка точка от сферично движещо се тяло може да се опише с помощта на ъгловите скорости.

$$(6) \begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x \end{aligned}$$

Като се приложи към фиг. 3, то:

$$(7) v_1 = \omega_z x_1 - \omega_x z_1 \rightarrow \Phi_1 = \frac{1}{2} b_1 [\omega_z^2 x_1^2 - 2\omega_z \omega_x x_1 z_1 + \omega_x^2 z_1^2]$$

Аналогично (като се съобразят координатите на точките):

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} b_2 [\omega_z^2 x_2^2 + 2\omega_z \omega_x x_2 z_2 + \omega_x^2 z_2^2]$$

$$(8) \Phi_3 = \frac{1}{2} b_3 [\omega_y^2 z_3^2 + 2\omega_y \omega_z z_3 y_3 + \omega_z^2 y_3^2]$$

$$\Phi_4 = \frac{1}{2} b_4 [\omega_y^2 z_4^2 - 2\omega_z \omega_y y_4 z_4 + \omega_z^2 y_4^2]$$

Тогава функцията на Рейли за конкретната задача добива вида:

$$(9) \Phi^{tot} = \sum_{i=1}^4 \Phi_i$$

За по-лесен запис се въвеждат означенията:

$$(10) \begin{aligned} B_{zi} &= x_1^2 b_1 + x_2^2 b_2; \\ B_{xi} &= z_1^2 b_1 + z_2^2 b_2; \\ B_{xzi} &= x_2 z_2 b_2 - x_1 z_1 b_1; \\ B_{yj} &= z_3^2 b_3 + z_4^2 b_4; B_{zj} = y_3^2 b_3 + y_4^2 b_4; \\ B_{yzj} &= z_3 y_3 b_3 - z_4 y_4 b_4 \end{aligned}$$

Тогава дисипативната функция се записва:

$$(11) \Phi^{tot} = \frac{1}{2} [\omega_z^2 B_{zi} + \omega_x^2 B_{xi} + 2\omega_x \omega_z B_{xzi} + \omega_y^2 B_{yj} + \omega_z^2 B_{zj} + 2\omega_y \omega_z B_{yzj}]$$

За да се формира матрицата [b] е необходимо да се изчислят нейните компоненти:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi^{tot}}{\partial \omega_x \partial \omega_x} &= B_{xi}; \quad \frac{\partial^2 \Phi^{tot}}{\partial \omega_x \partial \omega_y} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Phi^{tot}}{\partial \omega_x \partial \omega_z} = B_{xzi} \\ \frac{\partial^2 \Phi^{tot}}{\partial \omega_y \partial \omega_x} &= 0; \quad \frac{\partial^2 \Phi^{tot}}{\partial \omega_y \partial \omega_y} = B_{yj}; \quad \frac{\partial^2 \Phi^{tot}}{\partial \omega_y \partial \omega_z} = B_{yzj} \\ \frac{\partial^2 \Phi^{tot}}{\partial \omega_z \partial \omega_x} &= B_{xzi}; \quad \frac{\partial^2 \Phi^{tot}}{\partial \omega_z \partial \omega_y} = B_{yzj}; \quad \frac{\partial^2 \Phi^{tot}}{\partial \omega_z \partial \omega_z} = B_{zi} + B_{zj} \end{aligned}$$

За разглежданата задача дисипативната матрица има вида:

$$(12) [b] = \begin{bmatrix} B_{xi} & 0 & B_{xzi} \\ 0 & B_{yj} & B_{yzj} \\ B_{xzi} & B_{yzj} & B_{zi} + B_{zj} \end{bmatrix}$$

Съставен е програмен код в MATLAB, който изчислява матрицата [b].

За определянето на еластичната матрица може да се разсъждава аналогично. Потенциалната енергия на пружините може да се определи съгласно фиг. 3, като се определи тяхното удължение/скъсяване. За пружина с коравина k_1 :

$$(13) \quad \Delta l_{\alpha k1} = z_{k1}\alpha; \quad \Delta l_{\gamma k1} = x_{k1}\gamma \\ \rightarrow \Delta l_{k1} = \Delta l_{\gamma k1} - \Delta l_{\alpha k1}$$

, където α , β и γ са означени завъртанията спрямо оси x , y и z . Тогава потенциалната енергия на пружината се дава с:

$$(14) \quad E_{p,k1} = \frac{1}{2}k_1\Delta l_{k1}^2$$

Аналогията с (3) е видна. Потенциалната енергия на системата се дава с:

$$(15) \quad E_p^{tot} = \sum_{i=1}^4 E_{p,ki} + E_p^\Gamma$$

, където $E_p^\Gamma = z_C mg \left(\frac{\beta^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2} \right)$ е потенциалната енергия на положението. z_C е координатата на центъра на тежестта на системата по ос z . m е масата на цялата система, докато g е земното ускорение. Във формулата за потенциалната енергия на положението са пренебрегнати някои малки величини от по-висок порядък.

За по-лесен запис се въвеждат следните означения:

$$(16) \quad \begin{aligned} C_{\gamma i} &= k_1 x_{k1}^2 + k_2 x_{k2}^2; \\ C_{\alpha i} &= k_1 z_{k1}^2 + k_2 z_{k2}^2; \\ C_{\alpha \gamma i} &= k_2 z_{k2} x_{k2} - k_1 z_{k1} x_{k1} \\ C_{\beta j} &= k_4 z_{k4}^2 + k_3 z_{k3}^2; \\ C_{\gamma j} &= k_4 y_{k4}^2 + k_3 y_{k3}^2; \\ C_{\beta \gamma i} &= k_3 z_{k3} y_{k3} - k_4 z_{k4} y_{k4} \end{aligned}$$

Потенциалната енергия на системата се записва като:

$$(17) \quad E_p^{tot} = \frac{1}{2} [\gamma^2 C_{\gamma i} + \alpha^2 C_{\alpha i} + 2\alpha\gamma C_{\alpha \gamma i} + \beta^2 C_{\beta j} + \gamma^2 C_{\gamma j} + 2\beta\gamma C_{\beta \gamma j} + z_C mg(\beta^2 + \alpha^2)]$$

За да се изчислят елементите на еластичната матрица се търсят вторите производни на потенциалната енергия спрямо обобщените координати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_p^{tot}}{\partial \alpha \partial \alpha} &= C_{\alpha i} + z_C mg; & \frac{\partial^2 E_p^{tot}}{\partial \alpha \partial \beta} &= 0; & \frac{\partial^2 E_p^{tot}}{\partial \alpha \partial \gamma} &= C_{\alpha \gamma i}; \\ \frac{\partial^2 E_p^{tot}}{\partial \beta \partial \alpha} &= 0; & \frac{\partial^2 E_p^{tot}}{\partial \beta \partial \beta} &= C_{\beta j} + z_C mg; & \frac{\partial^2 E_p^{tot}}{\partial \beta \partial \gamma} &= C_{\beta \gamma j}; \\ \frac{\partial^2 E_p^{tot}}{\partial \gamma \partial \alpha} &= C_{\alpha \gamma i}; & \frac{\partial^2 E_p^{tot}}{\partial \gamma \partial \beta} &= C_{\beta \gamma j}; & \frac{\partial^2 E_p^{tot}}{\partial \gamma \partial \gamma} &= C_{\gamma i} + C_{\gamma j} \end{aligned}$$

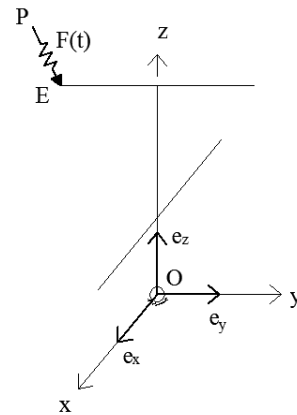
За разглежданата задача еластичната матрица добива вида:

$$(18) [c] = \begin{bmatrix} C_{\alpha i} + z_C mg & 0 & C_{\alpha \gamma i} \\ 0 & C_{\beta j} + z_C mg & C_{\beta \gamma j} \\ C_{\alpha \gamma i} & C_{\beta \gamma j} & C_{\gamma i} + C_{\gamma j} \end{bmatrix}$$

Използва се програмен код в MATLAB за по-лесна изчислителна работа.

5. Определяне на обобщените сили

Тъй като за обобщени координати са избрани завъртанията спрямо осите x , y и z на Декартова координатна система, то обобщените сили ще представляват моментите на външните въздействия спрямо тези оси.



Фиг. 4 – Принципна схема за определяне на обобщените сили

Използва се дефиницията за момент на сила спрямо ос с помощта на матрица, за да се улесни програмното реализиране.

$$(19) \quad M_s = \det \begin{bmatrix} \lambda_s & \mu_s & \nu_s \\ x_E - x_{os} & y_E - y_{os} & z_E - z_{os} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}$$

, където λ_s , μ_s и ν_s са посочните косинуси на оста, за която се търси момента. $x_E - x_{os}$ са разлики в координатите по x между т.Е и точка от оста. Аналогично е и означението по y и z . Вторият ред на детерминантата описва вектор, който свързва точка от оста с приложна точка на силата. В третия ред на детерминантата се разполагат проекциите на силата F по x , y и z . При наличие на повече от една смущаваща сила се извършва сумиране.

По направление на осите x , y и z :

$$\begin{aligned}
 M_x &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_E - 0 & y_E - 0 & z_E - 0 \\ F(t)_x & F(t)_y & F(t)_z \end{bmatrix} \\
 (20) \quad M_y &= \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_E - 0 & y_E - 0 & z_E - 0 \\ F(t)_x & F(t)_y & F(t)_z \end{bmatrix} \\
 M_z &= \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_E - 0 & y_E - 0 & z_E - 0 \\ F(t)_x & F(t)_y & F(t)_z \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Тогава векторът на обобщените сили добива вида:

$$(21) \quad \begin{Bmatrix} Q_\alpha \\ Q_\beta \\ Q_\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n M_{ix} \\ \sum_{i=1}^n M_{iy} \\ \sum_{i=1}^n M_{iz} \end{Bmatrix}$$

С това уравнение (2) е дефинирано и може да се реши при конкретни стойности за геометрията. Аналитични разглеждания също са възможни.

6. Заключение

Създадените динамичен и математически модели са първите два етапа от решението на една по-обща задача, целяща изследването на пространствените трептения на тяло. Необходимо е да се създаде модел в програма по МКЕ, за да се верифицират получените резултати. Експериментално изследване с помощта на изпитвателен стенд също е препоръчително.

ЛИТЕРАТУРА

- Бъчваров, С., А. Джонджоров, Б. Чешанков, Н. Малинов, Ръководство за упражнения и решаване на задачи по теоретична механика, София, Техника, 1973.
- Кисъв, И. Наръчник на инженера II част Механика, София Техника, 1979.
- Писарев, А. Механични трептения, София, Техника, 1985.
- Писарев, А., Ц. Парасков, С. Бъчваров, Курс по теоретична механика I част статика и кинематика, София, Техника, 1986.
- Яблонский, А., М. Никифорова, Курс Теоретической механики часть I Статика Кинематика, Москва, Высшая школа, 1962.
- Яблонский, А., М. Никифорова, Курс Теоретической механики часть II Динамика, Москва, Высшая школа, 1962.
- Moore, H., MATLAB for Engineers, USA, Pearson Education, 2013.

Generalized Dynamic and Mathematical Model of Small Angle Oscillations of Spherically Moving Body

Teodor TODOROV

The spherical motion of a rigid body under the premise of small angles is considered. To emphasize the spatial essence of the problem rod elements in three mutually perpendicular directions are used. It is possible for point masses to be attached along the direction of the rods. The body has a fixed point. Its equilibrium position is supported by linear springs. They also ensure the oscillations of the body at various deviations from its equilibrium position. Attenuating oscillations are to be studied through the use of damping devices. Forced oscillations are caused by transverse harmonic forces (model of wind effects), kinematic perturbations, modeling seismic effects (displacements of the base) and inertial perturbations, which are modeled by rotation of unbalanced masses. The mathematical model is described by Lagrange's equations of the second kind.

Keywords: Dynamic Model, Mathematical Model, Small Angle Approximation