FRI-2.116-1-ERI-06

ENTERTAINING PROBLEMS FROM GRAPH THEORY [6]

Pr. Assist. Prof. Desislava Georgieva, PhD
Department of Algebra and Geometry
Faculty of Mathematics and Informatics
St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo, Bulgaria
Phone: +359 887 244 498
E-mail: d.georgieva@ts.uni-vt.bg

Abstract: *The article describes how Graph Theory can be presented in an easy, accessible and engaging manner to secondary school students and thereby increase their motivation to learn the science of Mathematics. Basic theoretical knowledge from this theory is introduced in a student-friendly form. A system of entertaining tasks with drawings and solutions has been developed. New ways of visualization using modern technologies are proposed.*

Keywords: *Education, Graph theory, Entertaining tasks, Graph, Graph-tree, Vertices, Edges.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Динамичната промяна на света изисква да се въведе адекватна образователна система, която да успее да развие пълния потенциал на децата. Преподаването на знания по математика е огромна отговорност за учителя, а също и огромно предизвикателство. Пред него възникват въпросите: Как да мотивира учениците?; Как може да ги накара да преживеят целия ентусиазъм, цялото чудо на науката математика? Помощник в тази насока може да бъде *Теорията на графите*, която се разширява незабелязано отвъд математиката и в нашето ежедневие. Тя изследва връзките между обектите, които могат да бъдат представени като точки, а техните взаимоотношения като линии. Например картата на метрото може да се разглежда като граф, представящ транспортна мрежа. Една от най-важните характеристики на графите е, че те са абстракции на реалния свят.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Необходими теоретични знания – представени в достъпна форма

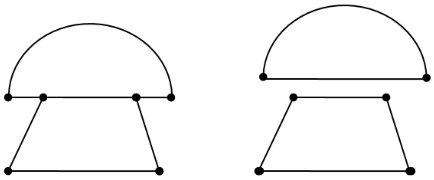
Определенията и описанията на понятията трябва да са в достъпна за учениците форма и да са съпроводени с конкретни визуални примери, като едновременно отразяват точно научната теория (Manev K., 2012, Bakoev, V., 2014, Vasileva, M., 2008). В тази връзка могат да се въведат следните определения:

Граф – множество от точки и линии, които съединяват някои от точките. Точките се наричат *върхове на графа*, а свързващите ги линии – *ребра на графа* (Фиг. 1.).

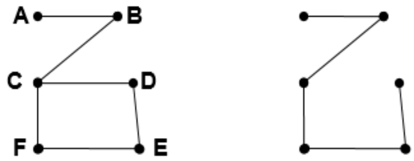
Графът се нарича *свързан*, ако е възможно, като се движим по ребрата му, да преминем от произволен негов връх, до който и да е от останалите. Графът в ляво на фигура 1. е свързан, а в дясно – *несвързан*.

Когато се придвижваме по ребрата, така че тръгвайки от един връх достигаме отново до него, казваме че е намерен *затворен път* или *цикъл в графа* (Фиг. 2.1.).

[6] Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 28 октомври 2022 г. в секция Образование – изследвания и иновации с оригинално заглавие на български език: ЗАНИМАТЕЛНИ ЗАДАЧИ ОТ ТЕОРИЯ НА ГРАФИТЕ.



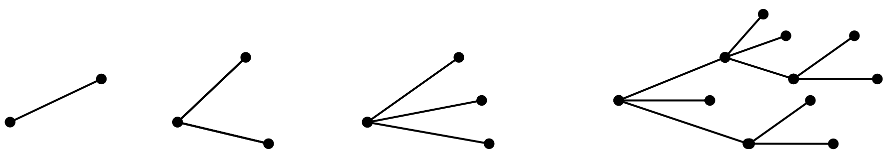
Фиг. 1. Свързан и несвързан граф



Фиг. 2. Граф с цикъл и без цикъл

Когато линиите са с указана посока (единия връх е начало, а другия край на реброто), графът се нарича *ориентиран*. Когато линиите на графа не са ориентирани, т.е. не е указана посока на връзката, графът, се нарича *неориентиран* (Фиг. 1. и 2.).

Граф-дърво се нарича свързан граф, който не съдържа цикли (Фиг. 3.).



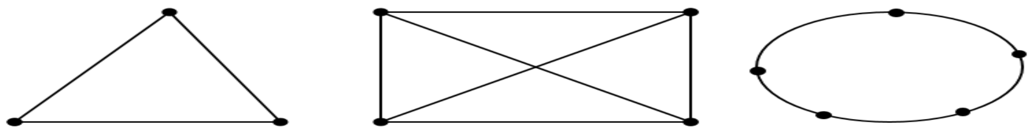
Фиг. 3. Граф-дърво

Ако всеки два върха на един граф са свързани помежду си с ребро, той се нарича *пълен* (Фиг. 4.1. и 4.2.). Ако има върхове, които не са свързани помежду си, графът се нарича *непълен* (Фиг. 4.3.).

Броят на ребрата излизащи от даден връх се нарича *степен на върха* (Фиг. 4. и Фиг. 5). Валидни са следните свойства:

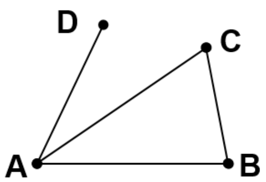
1. Броят на върховете от нечетна степен в даден граф е четно число (Василева, 2008, 167 с.).

2. Броят на ребрата в даден граф е равен на половината от сумата от степените на върховете („Лема за ръкостисканията“).



3 върха 3 ребра	4 върха 6 ребра	5 върха 5 ребра

Фиг. 4. Брой върхове и брой ребра на граф



В случая на Фиг. 5. върха А е от $3^{\text{-та}}$ степен, В от $2^{\text{-ра}}$, С от $2^{\text{-ра}}$, D от $1^{\text{-ва}}$. Броят на ребрата е: (3+ 2 + 2 + 1): 2 = 4.

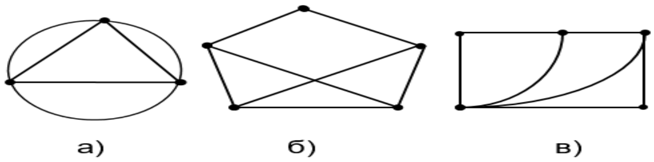
Фиг. 5. Степени на върховете

Под чертане „на един дъх” се разбира, че фигурата се начертава без молива да се вдига от хартията и без да минава два пъти по една и съща линия. Известни са научните факти:

1. Ако степените на всички върхове на един граф са четни, той може да се опише на един дъх, като се започне от кой да е негов връх и се завърши в него (Фиг. 6. а).

2. Ако повече от два върха са нечетни, този граф не е възможно да се опише на един дъх (Фиг. 6. б).

3. Ако точно два от върховете са нечетни, той може да се опише на един дъх като се започне от единия нечетен връх и се стигне до другия (Фиг. 6. в).



Фиг. 6. Обхождане на граф

Примерна методическа разработка

Спазвайки принципите на дидактиката, задачите трябва да са с нарастваща степен на сложност. Затова е добре да се започне с две съвсем елементарни комбинаторни задачи, които се решават с теория на графите.

Задача 1. В един ученически стол за закуска на децата се предлагат кифла, сок и ябълка. Колко различни закуски са възможни, ако всяко дете може да избере или да не избере всяко от предложените неща?

Решение: Всяко от децата може да избере закуска с кифла или без кифла. Същото се отнася за сока и ябълката. Тази ситуация графично може да се изобрази чрез граф-дърво (Фиг. 7.1.). Броят на всички възможности е 2.2.2 = 8 различни закуски.

След първата, учителят може да зададе за самостоятелно решаване подобна на нея задача, но с друг контекст (Задача 2.).

Задача 2. По колко различни начина можем да се облечем, ако имаме два вида панталони, два вида тениски и два чифта обувки?

Решение: Започваме с избора на блуза, след това преминаваме през избора на панталон и накрая завършваме с избора на обувки. От фиг. 7.2. виждаме, че всички възможности са 8.

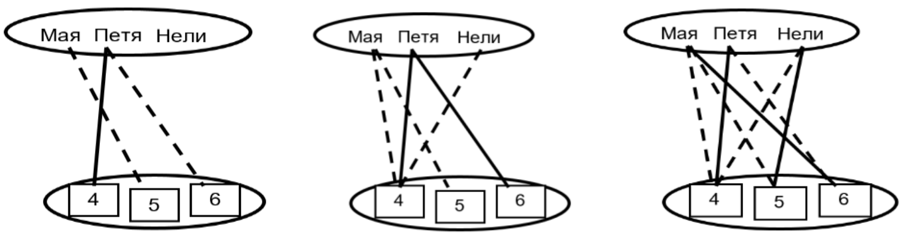
Обучаващият може да постави проблемна ситуация „Ако имаме 20 различни тениски, 10 панталона и 5 чифта обувки, по колко различни начина можем да ги съчетаем?“ чрез която да мотивира изучаването на абстрактната математическа теория, която дава отговор на подобни задачи, без значение на конкретните стойности на участващите параметри. Подобна задача би отнела доста време за изписване на всички различни варианти.

Фиг. 7. Граф-дърво изобразяващо комбинаторни задачи

След това може да се използва следната задача, която може да се реши чрез свързване на елементи на две множества или попълване на таблица с вярностни стойности.

Задача 3. Мая, Петя и Нели получили различни оценки на класното по математика – *4*, *5* и *6*. Оценката на Мая не е *5*, Петя е решила по-малко задачи от Нели и оценката ѝ е четно число. Чия класна работа е най-добра?

Решение: Определяме двете множества: от имената и от оценките (Фиг. 8.). Оценката на *Мая* не е *5,* затова свързваме с прекъсната линия елемента *Мая* и *5*. *Петя* е решила по-малко задачи от *Нели* следователно, оценката ѝ не е *6*. Затова свързваме с прекъсната линия *Петя* и *6*. Оценката на *Петя* е по-малка от 6 и е четно число следователно тя е *4*. Свързваме *4* и *Петя* с непрекъсната отсечка. В такъв случай оценките на *Мая* и на *Нели* не могат да са *4*, затова свързваме *Нели* и *4*, и *Мая* и *4* с прекъсната линия. *Мая* не е получила нито *4*, нито *5,* следователно оценката ѝ е *6*. За оценката на *Нели* остава да е *5*. Следователно класна работа на Мая е най-добра.



	Мая	Петя	Нели
4	0	0	1
5	0	1	0
6	1	0	0

Фиг. 8. Свързване на елементите на двете множества или попълване на таблица

След като обучаваните се опитат да решат следващата задача, като последователно оцветяват отсечките на изобразен в Word куб, може да се насочат към използване на теоретичните знания за *обхождане на един дъх*.

Задача 4. Може ли гъсеница да пропълзи по всички 12 ръба на куб, да мине през всички върхове без да премине по някой ръб два пъти?

Решение: Върховете на куба са върхове на граф, а ръбовете му са ребра. Всеки връх е от нечетна степен, тъй като от него излизат 3 ребра, т.е. повече от два върха са нечетни, следователно този граф не е възможно да се опише *на един дъх.*

Задача 5. В селище има 15 телефона. Може ли да ги съединим с кабел, така че всеки телефон да има връзка с точно 5 от останалите?

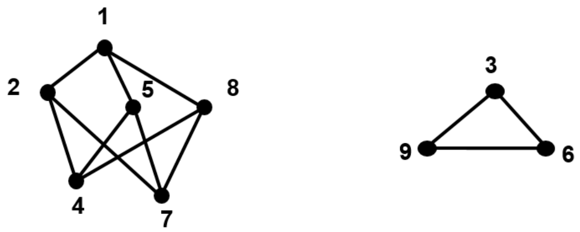
Решение: Да предположим, че това е възможно. Нека върховете на графа са телефонните постове а ребрата – свързващите ги кабели. Този граф има 15 върха, всеки от които е от степен 5. Броят на ребрата в този граф е (15.5):2, но това не е цяло число. Следователно такъв граф не съществува, което означава че не е възможно такова свързване на телефонните постове.

Задача 6. В един клас има 30 ученика. Възможно ли е 9 от тях да имат по трима приятели, 11 – по четири, а 10 – по пет?

Решение: Ако това е възможно би трябвало да начертаем граф с 30 върха, 11 от които са от степен 4, 9 са от степен 3, и 10 от степен 5. Но този граф има 19 нечетни върха, което противоречи на свойството за броя на върховете от нечетна степен в един граф. Следователно не е възможно.

Задача 7. В страната *Цифра* има 9 града с имена: *Едно*, *Две* и т.н. до *Девет*. Пътешественик забелязал, че два града са съединени с авиолиния, в този и само в този случай, ако двуцифрено число образувано от цифрите – наименования на тези градове се дели на 3. Може ли да се отиде от град *Едно* до град *Девет*.

Решение: На 3 се делят всички числа, чийто сбор от цифрите се дели на 3. Изобразяваме градовете като върхове и свързваме с ребра *1* и *2*, защото 12 и 21 се делят на 3. Нанасяме всички ребра (Фиг. 9.). Връх *9* се свързва само с *3* и *6* и не се свързва с останалите, защото сбора на 9 с другите цифри не се дели на 3. Върховете: *3*, *6* и *9* са от степен 2, а *1, 2, 4, 5, 7* и *8* са от нечетна степен 3 и са четен брой, т.е. към тях не може да се добави други връх. Следователно не може да се прелети от град *Едно* до град *Девет.*

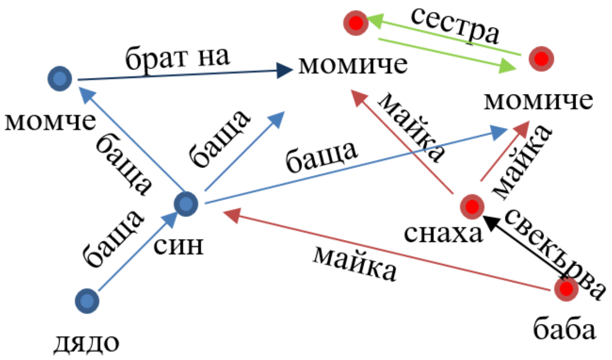


Фиг. 9. Задача за делимост изобразена с граф

Може да се продължи с колективно решаване и едновременно изобразяване с анимация в PowerPoint (последователно се появяват върховете и насочените ребра) на следната задача.

Задача 8. В къща живеели 1 дядо, 1 баба, 2 бащи, 2 майки, 4 деца, 2 жени, 3 внуци, 1 брат, 2 сестри, 2 синове, 2 дъщери, 2 мъже, 2 момичета, 1 свекърва, 1 момче 1 свекър и 1 снаха, а всички те били само 7 души. Пита се какви родственици са били тези хора (Ganchev, I., Chimev, K. & Stoyanov, Io., 1987).

Решение: От това, че в семейството има 1 дядо, 1 баба, 1 свекър, 1 свекърва, 1 снаха следва, че дядото е свекър, бабата е свекърва те имат син и снаха. Двете момичета и 1 момче са тримата внуци на дядото и бабата. Останалите релации могат да бъдат изобразени чрез ориентиран граф (Фиг.10).



Фиг. 10. Граф на роднинските релации

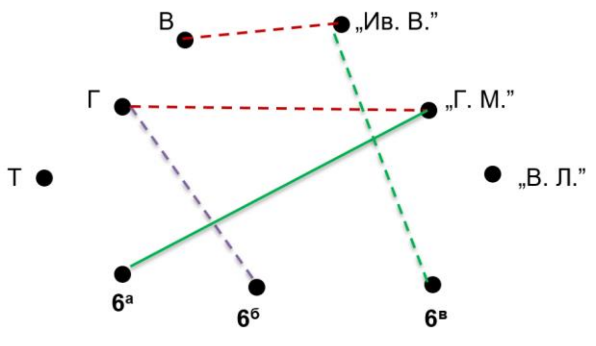
Следващата логическа задача е по-сложна и изобразяването ѝ с таблици е трудно, но построяването на граф значително подпомага процеса на решаване.

Задача 9. Васко, Гошо и Тошо са добри приятели, макар да са от различни паралелки – $6^а$, $6^б$, $6^в$, и да живеят на различни улици: „Ив. Вазов”, „Гео Милев” и „В. Левски”. Намерете кой на коя улица живее и от коя паралелка е, като знаете, че: Васко не живее на ул. „Ив. Вазов”, а Гошо не живее на ул. „Гео Милев” и не е от $6^б$. Ученикът, който живее на ул. „Ив. Вазов”, не е от $6^в$. Ученикът, който живее на ул. „Гео Милев”, е от $6^а$.

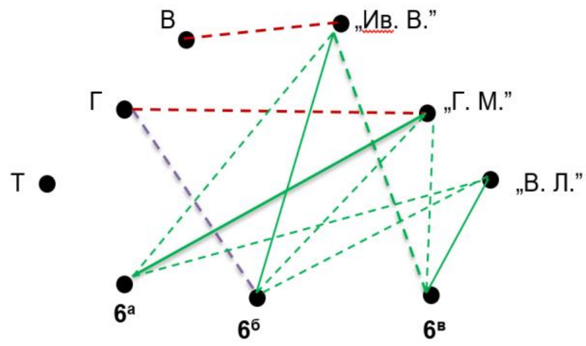
Решение: Като се използва беседа, се разкриват трите множества – множеството от ученици {В, Г, Т}; множеството от паралелки {$6^а$, $6^б$, $6^в$} и множеството от улици {„Ив. В.”, „Г. М.”, „В. Л.”}, и необходимостта от 3 таблици или от триизмерна таблица. Много по-удобно е да се използва граф, чиито върхове са елементите на трите множества (Фиг. 11.1.).

Нанасяме данните от условието като с непрекъсната черта изобразяваме релациите които съществуват, а тези които са с отрицание ги изобразяваме с пунктирани отсечки. Данните които са дадени в условието можем да нанесем с по-дебела линия спрямо релациите, които установяваме по логически път. Преглеждаме върховете и забелязваме, че от $6^а$ излиза плътно ребро към улица „Г. М.”, следователно ученикът от $6^а$ не живее на улица „Ив. В.” и „В. Л.”, затова поставяме пунктирани отсечки към тях. Забелязваме че от улица „Ив. В.” излизат 2 пунктирани линии, следователно третата отсечка към $6^б$ клас трябва да е плътна, т. е. тази релация е налична. Класът $6^б$ е свързан с плътна отсечка с улица „Ив. В.” следователно останалите 2 ребра към другите 2 улици трябва да са с пунктирани отсечки. От улица „Г. М.”

излизат 2 ребра, следователно можем да определим и третото ребро към $6^{в}$ клас с прекъсната отсечка, тъй като към $6^{а}$ е с плътна. От върха „В. Л." 2 ребра и са пунктирани, затова прекарваме плътна отсечка между улица „В. Л." и $6^{в}$. На този етап всички улици и всички паралелки са свързани (Фиг. 11.2.).

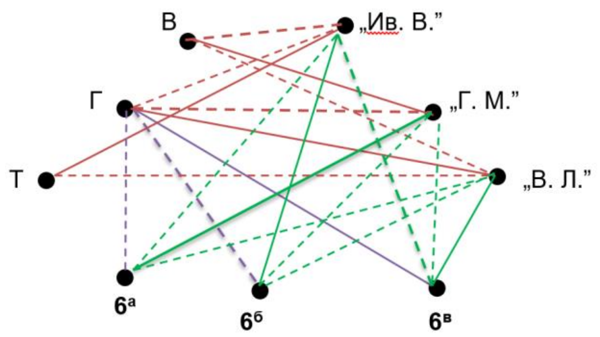


Фиг. 11.1. Данните от условието

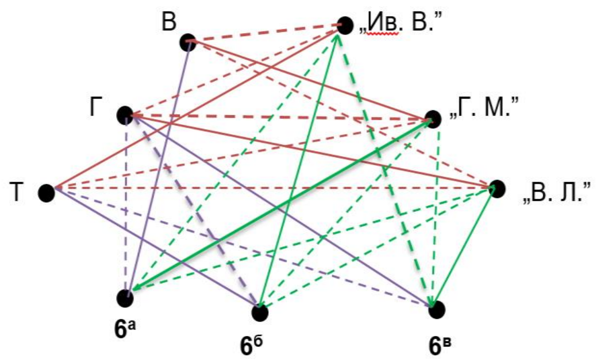


Фиг. 11.2. Релации – улици и паралелки

Преминаваме към свързване на учениците с улиците. По условие ученикът от $6^{а}$ живее на улица „Г. М.", а Гошо не живее на улица „Г. М.", следователно Гошо не е от $6^{а}$ клас. Дадено е, че Гошо не е от $6^{б}$, следователно Гошо е от $6^{в}$ клас, поставяме тази отсечка. Ученикът от $6^{б}$ клас живее на улица „Ив. В.", следователно Гошо не живее на улица „Ив. В.". По условия не живее на улица „Г. М." остава да живее на улица „В. Л.", поставяме това ребро. Следователно Тошо и Васко не живеят на улица „В. Л." – пунктирани отсечки. В този случай, Васко не живее на улица „Ив. В." и не живее на улица „В. Л.", следователно живее на улица „Г. М." – отбелязваме с плътна отсечка. Тогава Тошо живее на улица „Ив. В.". Като проследим плътните линии установяваме, че Васко е от улица „Г. М." и от $6^{а}$, Гошо е от улица „В. Л." и е от $6^{в}$, следователно остава Тошо да бъде от улица „Ив. В." и от $6^{б}$ клас. Можем да поставим останалите свързващи ребра, но за да не утежняваме чертежа няма да ги добавяме.



Фиг. 11.3. Релации – ученици и улици



Фиг. 11.4. Финални релации

Получават се три триъгълника с непрекъснати линии, с върхове от $3^{-те}$ множества, което е и проверка за вярност на решението.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учителят може да използва съвременните технологии като интерактивна бяла дъска и проектор за по-качествена визуализация на графите и таблиците, а и учениците в реално време могат да маркират ребрата и върховете и безпроблемно да отменят своите действия в случай на „тръгване по погрешен път" и търсене на друг по-удачен вариант.

Добрият подбор от занимателни задачи, се явява ефективно средство за формиране личността на ученика, умствените му характеристики и неговите морално-волеви качества. Чрез занимателните задачи може да се възбуди любопитството и любознателността у децата към науката математика. Обучаващият може да помогне на обучаваните да открият страстта си към математиката по-лесно и увлекателно с помощта на занимателните задачи от *Теория на графите*.

БЛАГОДАРНОСТ

Това изследване е подкрепено от проект 2022-ФПНО-03, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

REFERENCES

Bakoev, V., (2014) Discrete mathematics: sets, relations, combinatorics, KLMN. ISBN: 9789548212052 (***Оригинално заглавие:*** Бакоев, В., 2014. Дискретна математика: множества, релации, комбинаторика КЛМН).

Ganchev, I., Chimev, K. & Stoyanov, Io., (1987). Mathematical Folklore – Second Supplemented Edition Sofia: Narodna Prosveta (***Оригинално заглавие:*** Ганчев, И., Чимев, К., Стоянов, Йо., 1987. Математически фолклор – второ допълнено издание София: Народна просвета).

Kolev, E. & Sabeva, N., (2016). Mathematics for advanced mathematics school for 5th, 6th, 7th grade. UNIMAT SMB (***Оригинално заглавие:*** Колев, Е. & Събева, Н., 2016. Математика за напреднали школа по математика за 5., 6., 7. клас. УНИМАТ СМБ URL: http://www.math.bas.bg/~telecom/CV/Nevena%20CV/temi/mathadvanced.pdf).

Manev K., 2012. Introduction to discrete mathematics. Sofia: KLMN, ISBN 9789545351365 (***Оригинално заглавие:*** Манев К., 2012. Увод в дискретната математика. София: КЛМН)

Millen, I., Graph Theory-II (Милен, И., Теория на графите-II https://www.academia.edu (Accessed on 16.07.2022)).

Vasileva, M., 2008. Discrete structures. Shumen: NSU "V. Levski", ISBN 978-954-9681-32-1 (***Оригинално заглавие:*** Василева, М., 2008. Дискретни структури. Шумен: НВУ „В. Левски“).