



Х МЕЖДУНАРОДНА НАУЧНА КОНФЕРЕНЦИЯ
по **АРХИТЕКТУРА И СТРОИТЕЛСТВО**
ArCivE 2021
29 Май 2021 г., Варна, България
Xth INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE
on **ARCHITECTURE AND CIVIL ENGINEERING**
ArCivE 2021
29 May 2021, Varna, Bulgaria



ПРИЛОЖЕНИЕ НА ГРАФИЧНОТО ИНТЕГРИРАНЕ В НЯКОИ ЗАДАЧИ ОТ МЕХАНИКАТА

Теодор Тодоров¹, Светлана Лилкова-Маркова²

РЕЗЮМЕ:

В настоящата статия е демонстриран методът на графичното интегриране при решението на някои задачи от механиката. Разгледани са пример от кинематиката, а също и задачи за определяне на еластичната линия при различни греди. Поставен е акцент върху изчертаването на диаграми на различни величини.

Ключови думи: кинематика, греда, еластична линия, графично интегриране

APPLICATION OF GRAPHICAL INTEGRATION IN SOME MECHANICS PROBLEMS

Teodor Todorov¹, Svetlana Lilikova-Markova²

ABSTRACT:

In the current article the method of graphical integration in solving some mechanics problems is demonstrated. An example of kinematics is considered, as well as problems for determining the deflection curve at different beams. Drawing diagrams of different quantities is emphasized.

Keywords: kinematics, beam, deflection curve, graphical integration

¹ Теодор Тодоров, ас. инж., катедра „Техническа механика“, ХТФ, УАСГ-София

Teodor Todorov, Assistant Prof. eng., Department of Technical Mechanics, FHE, UACEG-Sofia, tstodorov_fhe@uacg.bg

² Светлана Лилкова-Маркова, проф. д-р инж., катедра „Техническа механика“, ХТФ, УАСГ-София

Svetlana Lilikova-Markova, Prof. Dr. eng., Department of Technical Mechanics, FHE, UACEG-Sofia, lilkovasvetlana@gmail.com

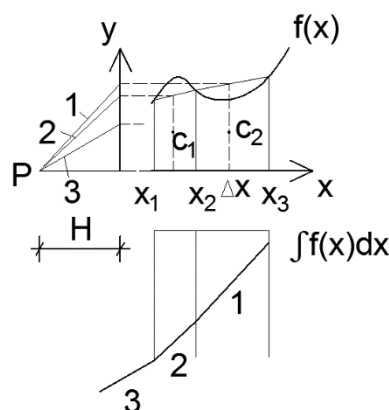
1. Въведение

От методична гледна точка е полезно бъдещите инженери да добият визуална представа за математическите операции, които съпътстват неотлъчно работата в процеса на обучение и в практиката. Голяма част от физичните закони се описват с функции. Това обосновава необходимостта добре да се познава математическият анализ. В университетските курсове традиционно се набляга върху аналитичните решения [1], [2], [3]. В настоящата статия се представя интегриране на функция при известна нейна графика. Това е особено полезно, когато функцията, която трябва да се интегрира, не е позната. Например, моментовата диаграма за натоварена гредка е построена, без да е търсена функцията на момента.

Графичните решения са известни в механиката [4], [5]. Тези решения не се прилагат много, поради това, че се натрупва грешка при работа с класически чертожни инструменти. С навлизането на съвременните CAD програми за графичен дизайн този проблем отпада. В настоящата статия се работи с програмен продукт AutoCAD.

2. Графично интегриране

Нека графиката на функция $f(x)$ е позната. Абсцисата се разделя на достатъчно малки интервали Δx и площта, заключена между графиката на $f(x)$ и абсцисната ос, се апроксимира с трапеци Фиг. 1.



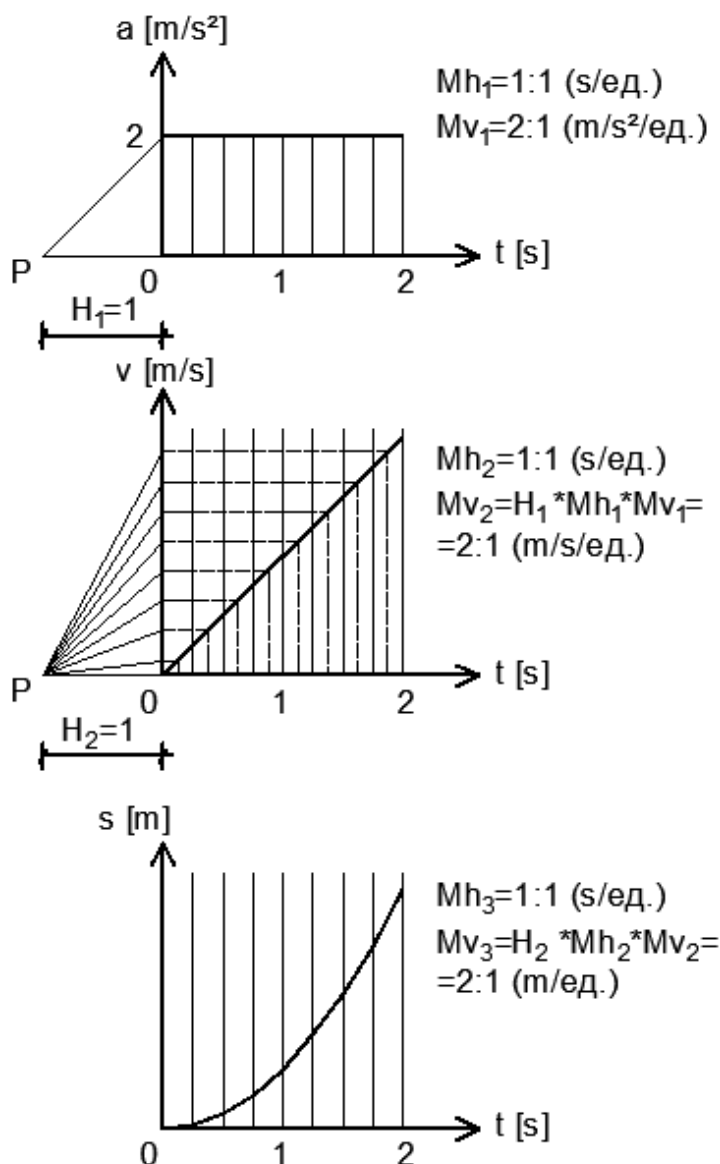
Фиг. 1. Графично интегриране – принципна схема

Намира се средната основа на всеки трапец и се проектира върху ординатната ос. Избира се полюс P и полюсно разстояние H . Полюсът се свързва с точките в горния край на проекциите на съответните средни основи. Тези полюсни лъчи се пренасят успоредно под съответните трапеци. От края на права 1 се чертае права 2, от края на права 2 се чертае права 3 и т.н. Получената начупена линия е графика на $\int f(x) dx$, понеже правите 1, 2, 3 определят ъглите, които допирателната към точка от функцията сключва с абсцисната ос – т.е. използва се геометричната дефиниция за производна. Ясно е, че точността на такова решение зависи от избора на Δx – при по-малка стъпка ще се получи и по-точно решение. Нулевата линия на графиката $\int f(x) dx$ зависи от началните условия на конкретната задача.

3. Пример 1: Кинематика на точка

Точка се движи с ускорение $a = 2 \text{ m/s}^2$. Да се определи изминатият от нея път след време $t = 2 \text{ s}$. В началния момент точката е била в състояние на покой. Решение: Тук е удобно да се приложи графичното интегриране. Примерът е достатъчно прост, за да се провери решението аналитично и в същото време се демонстрира една пълно решена задача. Това решение е полезно още и с това, че демонстрира определянето на мащабите за различните криви. Известно е, че при даден закон за ускорението като функция на времето, законите за скоростта и пътя се получават след последователно интегриране. За да се приложи графичен метод за решението е необходимо да се познава графиката на закона за изменение

на ускорението. В случая трябва да се построи графика на константа, която впоследствие да се интегрира по описания вече начин. Това е показано на *Фиг. 2*.



Фиг. 2. Графично решение на пример 1

Целесъобразно е мащабът по хоризонталата да е един и същ, тъй като традиционно много графики за прегледност се разполагат една под друга. Работено е в безразмерното моделно пространство на AutoCAD и затова отчетите са дадени в чертожни единици (ед.) Видно е, че мащабът по хоризонталата за трите графики е 1:1. Вертикалният мащаб за първата графика се избира по подходящ начин - да позволява разположението на всички останали графики в рамките на листа (Mv_1). Вертикалните мащаби за останалите графики се определят, като за вертикалния мащаб на графика n (n е равно или по-голямо от 2) се умножат хоризонталният мащаб, вертикалният мащаб и полюсното разстояние на предната графика $n-1$.

$$Mv_n = H_{n-1} \cdot Mh_{n-1} \cdot Mv_{n-1}$$

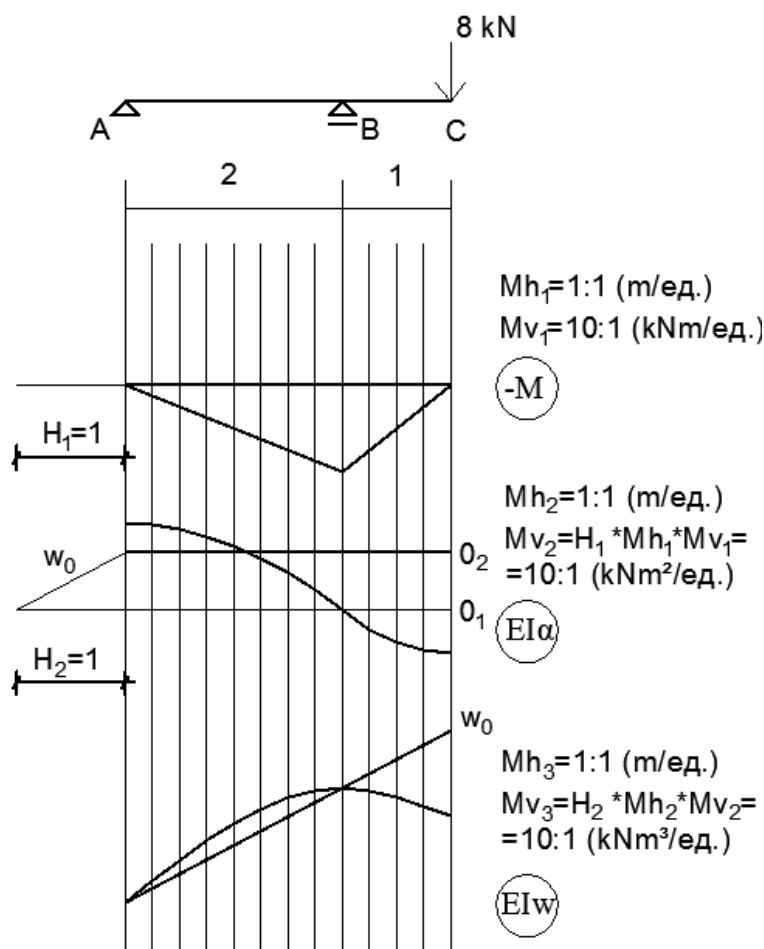
След измерване се установява, че ординатата на третата графика при $t = 2$ s е 2 ед. След умножение по Mv_3 се получава 4 m, а това число съответства на търсената стойност на изминатия път. Вижда се, че получената трета графика представлява траекторията на движението на точката. Осите на координатните системи са разположени така, че да съответстват на нулевите начални условия.

4. Пример 2: Еластична линия при конзола и проста греда

Да се определят от даденото натоварване вертикалните премествания в конструкциите. Решение: Функцията за вертикалните премествания на точките от оста на гредата (еластичната линия) може да се получи от решението на диференциалното уравнение:

$$EIw''(x) = -M(x).$$

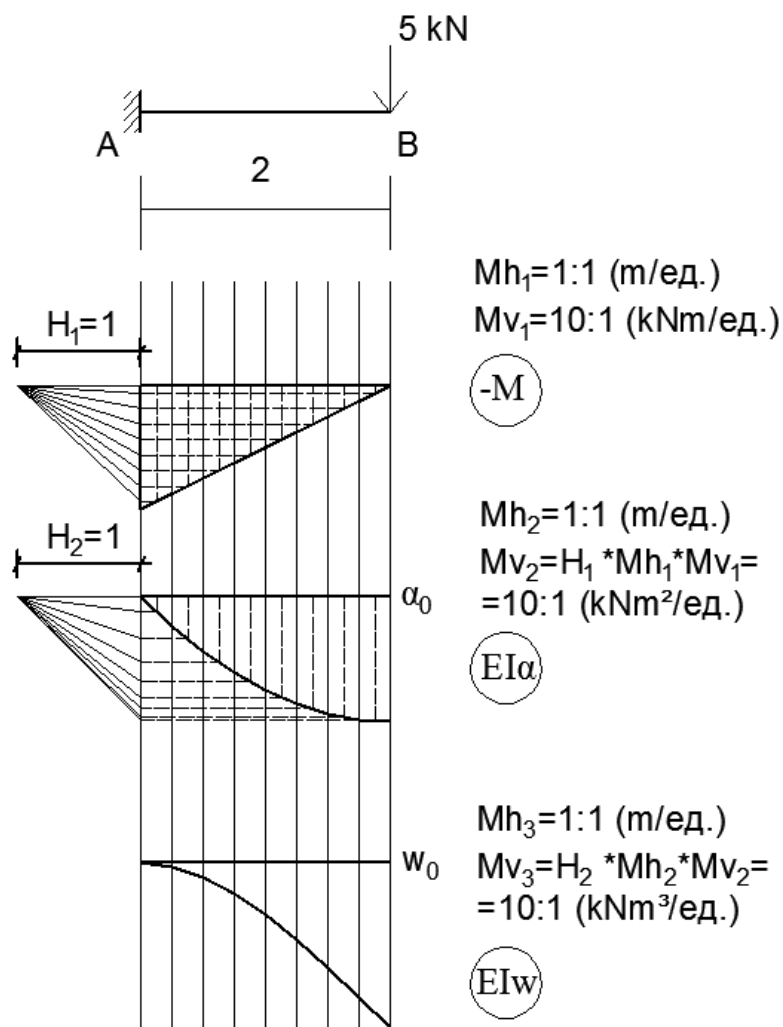
В него E е модулът на Юнг за материала, от който е изпълнена конструкцията, I е инерционният момент, а $M(x)$ е огъващият момент във функция на координатата по оста на гредата. Прилага се методът на графичното интегриране за диаграмата на огъващия момент (виж Фиг. 3 и Фиг. 4).



Фиг. 3. Построение на еластична линия на проста греда

Коментираната по-горе методика на построение на кривите $EI\alpha$ и EIw не е показана, за да не се претрупва чертежът. Важно е да се отбележи как се определят нулевите линии в съответните диаграми. Моментовата диаграма се чертае по някой от известните начини. След това тази диаграма се интегрира графично (на Фиг. 3 е показано полното разстояние H_1) и е получена кривата $EI\alpha$. За тази крива не е нанесена нулевата линия. Първоначалната нулева линия (на Фиг. 3 това е правата 0_1) се избира според формата на моментовата диаграма. Предполага се къде е точката, в която допирателната към моментовата диаграма сключва нулев ъгъл с абсцисната ос (нулево завъртане). В тази точка се построява първоначалната нулева линия за $EI\alpha$. Впоследствие тази нулева линия се коригира, но на този етап от решението се използва първоначалната нулева линия 0_1 , за да се интегрира графично диаграмата $EI\alpha$. Получава се кривата EIw . Нулевата линия за тази крива е отбелязана с w_0 на Фиг. 3. w_0 е построена на база на началните условия на задачата – в случая за проста греда е ясно, че при опорите не може да има вертикално преместване. Поради тази причина пресечните точки на кривата EIw с вертикалите през опорите принадлежат на нулевата линия.

Тези две точки от нулевата линия се свързват с права и се получава w_0 . Видно е, че w_0 не е разположена по хоризонталата. w_0 се пренася успоредно до полюса за графиката $EI\alpha$. Точката, в която пренесеното w_0 се пресича с вертикалата през опората (по която са определяни проекциите на средните основи на трапеците), е точка от действителната нулева линия за $EI\alpha$. Построява се действителната нулева линия 0_2 , успоредно на първоначално приетата 0_1 . Отчетите на преместванията или завъртанята (при съобразяване и с мащабите) се извършват по вертикалата за сечението, което ни интересува. За точката С от графичното решение се отчита $w_C = 0,79$ и $\alpha_C = 0,92$. Отчитат се и мащабите и се получава: $EIw_C = 7,9 \text{ kNm}^3$ и $EI\alpha_C = 9,2 \text{ kNm}^2$. Ако задачата се реши аналитично по метода на директното интегриране, се установява, че точните стойности на разглежданите величини са: $EI\alpha_C = 9,333 \text{ kNm}^2$ и $EIw_C = 8 \text{ kNm}^3$. Видно е, че процентните грешки между графичното и аналитичното решение за завъртането и преместването на т.С са, както следва: $\Delta\alpha_C = 1,44 \%$ и $\Delta w_C = 1,26 \%$. При разделяне на по-малки интервали Δx по дължина на гредата тези грешки ще бъдат по-малки.



Фиг. 4. Построение на еластичната линия при конзола

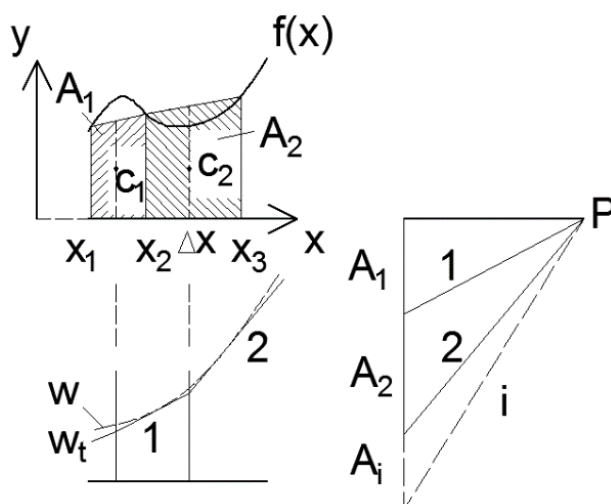
За построяване на еластичната линия за конзола се използва фактът, че при запъването преместването и завъртането са нули – нулевата линия е хоризонтална. На Фиг. 4 нулевите линии са означени съответно за $EI\alpha$ - α_0 и за EIw - w_0 . За преместването и завъртането на т.В отчетите от графиките са: $w_B = 1,33$ и $\alpha_B = 1$. След съобразяване и с мащабите се получава: $EIw_B = 13,3 \text{ kNm}^3$ и $EI\alpha_B = 10 \text{ kNm}^2$. Ако задачата се реши аналитично по метода на непосредственото интегриране се установява, че точните стойности на разглежданите величини са: $EI\alpha_B = 10 \text{ kNm}^2$ и $EIw_B = 13,333 \text{ kNm}^3$. В този случай грешката е практически нула.

Забележка: Точността на отчитане в AutoCAD позволява да се работи с отчети с до 4 знака след запетаята. На листа хартия такава точност е немислима. Но най-важна за точността при графичното решение е приетата стъпка Δx .

5. Приложимост на графичния метод

Графичният метод се основава на геометричния смисъл на производна и интеграл. От математиката е известно [6], [7], че една функция трябва да бъде гладка и непрекъсната, за да бъде диференцируема в дадена точка. Ако в диаграмите, които се интегрират графично, има неизвестен по големина скок, то не е възможно да се „отгатне“ нулевата линия. Характерен пример в това отношение са Герберовите конструкции. В ставите между отделните съставни греди на такива конструкции има прекъсване на диаграмата на завъртанията, което възпрепятства последващото построение на еластичната линия.

За да се избегне това затруднение, в литературата [8], [9] се препоръчва директно построение на еластичната линия от моментовата диаграма, като вместо със средни основи на трапеците се работи с техните площи (виж Фиг. 5). Необходимо да се намерят центровете на тежестта на тези трапеци. Във всеки такъв център се прилага сила с големина, равна на площта на съответния трапец. За моментова диаграма под оста силите се насочват нагоре, за моментова диаграма над оста – силите се насочват надолу. Силите се отчитат отляво надясно последователно в силов полигон.

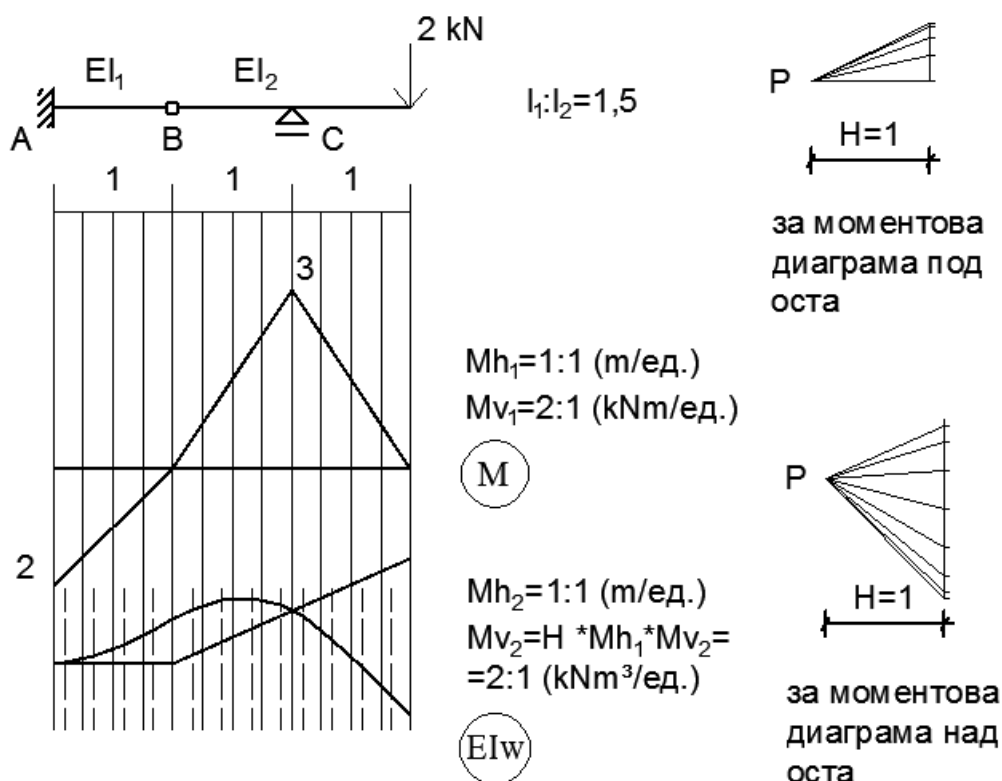


Фиг. 5. Схема на построение на еластична линия от моментова диаграма

Наклоните, определени от полюса и краищата на силите в силовия полигон, определят и кривата, която е нанесена в подходящ мащаб под моментовата диаграма. Тази крива представлява и приближената еластична линия. На теория тази крива е съставена от допирателните към еластичната линия. При достатъчно малка стъпка Δx тези криви (еластичната линия (w – виж Фиг. 5.) и кривата, съставена от допирателните към нея (w_t – виж Фиг. 5.)) практически съвпадат.

6. Пример 3: Еластична линия на Герберова греда

Да се начертае еластичната линия за показаната Герберова греда. Дадено е отношение между инерционните моменти в двата участъка $I_1:I_2 = 1,5$. Решението на задачата се извършва графично (Фиг. 6.). За яснота силовият полигон е разбит на две части – съответстващ на частта от моментовата диаграма под оста и на такъв за моментовата диаграма над оста. Поради различните инерционни моменти на двата участъка е необходимо моментовата диаграма във втори участък да се умножи по $I_1:I_2 = 1,5$ и да се работи с получената графика.



Фиг. 6. Графично определяне на еластична линия в Герберова греда

За определянето на нулевата линия се разглежда подпирането на Герберовата греда. За конзолния участък нулевата линия е хоризонтална, а за простата греда нулевата линия минава през точките на подпиране. Използва се фактът, че при ставата на Герберовата греда преместванията са едни и същи за двата участъка. Интересно е да се отбележи, че при графичното определяне на еластичната линия за Герберови греди нулевата линия се получава начупена – за всеки участък от Герберовата греда има и клон на нулевата линия. За по-голяма прегледност е възможно съответните стойности да се транслират до получаване на хоризонтална нулева линия. Възможно е и отчитане на стойности за преместванията директно от нетранслираната графика. За стойността на получената графика в свободния край се установяват 1,33 чертожни единици под нулевата линия, което след отчитане на мащаба дава $2,66 \text{ kNm}^3$. Ако същата Герберова греда се реши с директно интегриране, то се установява, че преместването в разглежданото сечение е $2,666 \text{ kNm}^3$, т.е. практически грешката е нула. Възможно е да се определи и ъгълът на завъртане в сечение от гредата, като се използва силовият полигон. Например, за десния край на гредата се измерва дължината по вертикалата за полигона, съставен за моментовата диаграма над оста на конструкцията - 1,5 чертожни единици. След умножаване по мащаба се получава 3 kNm^2 . От аналитичното решение се получава $3,166 \text{ kNm}^2$ EI-кратна стойност на завъртане за същото сечение.

Срязващата сила в сечение се получава графично върху силовия многоъгълник. Тя се определя чрез отсечка върху образуваща на този многоъгълник. Краищата на тази отсечка са върху лъчи, успоредни на страни от този многоъгълник, и вертикалата през сечението.

7. Предимства на графичното решение за еластична линия

- При графичното решение не е необходимо да се чертае фиктивната греда. Прилага се при произволно натоварване на гредата.
- Решението при сложни товари изисква почти същото време като при прости товари.
- Лесно се забелязва евентуална грешка.
- За практически цели точността почти винаги е достатъчна.

- Удобно е за определяне на преместванията и завъртанията в много сечения и когато е трудно да се прецени в кое сечение те са максимални по абсолютна стойност.
- Прилагането му е възможно и при греди с променливо напречно сечение по дължината им.

8. Заключение

Методът на графичното интегриране е приложим, когато е необходимо да се намери функцията $\int f(x)dx$, при условие, че е позната графиката на $f(x)$ и функциите, представляващи интерес, са достатъчно на брой пъти диференцируеми в разглеждания интервал. Не е необходимо аналитично решение на диференциални уравнения. При наличие на прекъсване в някоя от функциите графичното интегриране не е приложимо. Традиционен пример е графичното определяне на еластична линия на Герберова греда.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Миролубов, И. и колектив, Пособия к решению задач по Сопротивлению материалов, Высшая школа, Москва, 1967.
- [2] Беляев, Н., Сопротивление материалов, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1951.
- [3] Кисьов, И., Джонов, Ц., Йорданов, Й., Методическо ръководство за решаване на задачи по Съпротивление на материалите, Техника, София, 1985.
- [4] Рудицын, М., Расчетно-графические работы по сопротивлению материалов, Издательство Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина, Минск, 1957
- [5] Trefftz, E., Graphostatik, Verlag und Druck von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1936.
- [6] Илин, В., Садовничи, В., Сендов, Б., Математически анализ 1, Издателство „Наука и изкуство“, София, 1984.
- [7] Леви, Р., Диференциално и интегрално смятане. Функции на няколко променливи, Университетско издателство „Св. Кл. Охридски“, София, 2015.
- [8] Тихомиров, Е., Курс сопротивления материалов, ОНТИ-ГТТИ, Москва, 1934.
- [9] Малчев, И., Съпротивление на материалите, Техника, София, 1961.